

Août 1966

LRP 27/66

LABORATOIRE DE RECHERCHES SUR LA PHYSIQUE DES PLASMAS  
FINANCÉ PAR LE FONDS NATIONAL SUISSE DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Confinement d'un plasma par champ tournant  
LA STABILITE DU SYSTEME GENERATEUR-PLASMA.

Erich S. Weibel

LAUSANNE

Août 1966

LRP 27/66

Confinement d'un plasma par champ tournant  
LA STABILITE DU SYSTEME GENERATEUR-PLASMA.

Erich S. Weibel

Abstract :

The radio frequency generators supplying the power to build up the confining fields and to heat the plasma are coupled to the latter optimally as described previously 1). The low frequency stability of this system is analyzed, taking into account the increase in time of the plasma temperature and of the field amplitude. The system is shown to be stable.

Lausanne

## I. Introduction :

Un plasma confiné par un champ magnétique tournant est stable si certaines conditions sont remplies 2), 3). Une de ces conditions exige que les courants qui produisent le champ proviennent de générateurs à impédances nulles. Cette condition étant irréalisable, on se demande dans quelle mesure elle peut être relaxée. En pratique, on voudrait réduire au minimum la puissance des générateurs, ce qui conduit à placer le plasma dans des circuits résonnants et d'y adapter les générateurs. Puisque le transfert d'énergie entre plasma et générateur sera tout aussi efficace dans un sens comme dans l'autre, on peut craindre que ce système ne soit instable. Par exemple, si le plasma se dilate, la fréquence de résonnance change et l'amplitude du champ et de la pression magnétique diminuera avec le temps. Est-ce que le plasma se dilatera davantage ?

Ce rapport montre que le plasma reste stable même si les générateurs sont adaptés optimalement aux circuits résonnants du plasma. La condition d'impédance nulle n'est donc pas nécessaire.

D'emblée, il est clair qu'il ne faut s'occuper que du mode de déformation  $h = n = 0$  qui est une contraction ou dilatation radiale pure. Tous les autres modes ne changent pas la self-inductance du plasma et n'auront, par conséquent, pas d'effet ni sur les circuits, ni sur le transfert d'énergie.

Ce travail prend comme base de départ une théorie macroscopique du confinement par un champ tournant programmé, théorie qui a déjà été décrite 1). Rappelons qu'un plasma ainsi confiné est chauffé en même temps. Sa température et pression augmentent et sa résistance diminue avec le temps. Le champ confinant doit croître sans cesse selon un programme établi dans le rapport précité.

Une théorie de stabilité "exacte" étant intraitable, il faut simplifier quelque peu la situation. Cependant, pour que le résultat soit plausible, il faudra certainement tenir compte : 1. de la programmation du champ, 2. de la variation avec le temps de la valeur d'équilibre de la résistance, 3. de la variation de la self et de la résistance avec le rayon du plasma et 4. du couplage entre les deux circuits Z et  $\Theta$ .

Par contre, on se bornera à considérer les variations suffisamment petites qui permettent de linéariser les équations. On négligera la composante oscillante de la pression magnétique perturbée, et les équations déterminant les courants sont approximées par des équations de premier ordre pour leurs amplitudes. Ces deux dernières approximations limitent l'étude à des déformations dont la fréquence est en dessous de la fréquence appliquée. Pour les fréquences plus élevées, les analyses citées 2), 3) sont applicables parce que les capacités des circuits résonnants court-circuitent le plasma. Cependant, cette division des fréquences en deux gammes séparées n'est pas aussi nette qu'on pourrait le souhaiter. Mais un traitement plus exact ne paraît pas être facile.

## II. Les équations des circuits.

Les générateurs sont couplés au plasma au moyen de deux circuits, un pour la composante  $B_Z$  et l'autre pour  $B_\Theta$  (Fig. 1). Ecrivant pour la tension du générateur  $V_g(t)$  et le courant  $I(t)$

$$V_g(t) = \sqrt{2} \hat{V}_g(t) e^{i\omega t}, \quad (1)$$

$$I(t) = \sqrt{2} \hat{I}(t) e^{i\omega t} \quad (2)$$

on obtient une équation approximative du premier ordre pour l'amplitude complexe (amplitude et phase).

$$\frac{d\hat{I}}{dt} + \hat{I}(i\alpha + \gamma) = \hat{V}_g / (i2\omega LCR_g) \quad (3)$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2}(\omega - \frac{1}{LC\omega}) \quad (4)$$

et

$$\gamma = \frac{1}{2R_gC} + \frac{R}{2L} + \frac{\dot{L}}{L} \quad (5)$$

Cette équation donne une bonne approximation si L et R varient lentement par rapport à  $\omega$  et si

$$\int \frac{1}{2}(\omega - \frac{1}{LC\omega}) dt \ll 1. \quad (6)$$

### III. Le mouvement du plasma.

La relation entre le champ tournant appliqué B, le rayon du plasma a et le temps a déjà été dérivée 1). On désigne par  $a_0$ ,  $B_0$ ,  $T_0$ ,  $n_0$ , le rayon du plasma, le champ, la température et la densité initiales de façon que

$$4 \mu_0 k T_0 n_0 = B_0^2. \quad (7)$$

On définit un temps de référence

$$t_0 = \frac{\mu_0 a_0}{\mathcal{R}_0(T)} \quad , \quad (8)$$

où  $\mathcal{R}(T)$  est la résistance de surface du plasma, une fonction de la température. La relation mentionnée s'écrit alors

$$B/B_0 = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{5/3} \quad , \quad (9)$$

où  $a$  peut être une fonction prescrite du temps.

Par la suite nous utiliserons les rapports

$$\beta = a/a_0, \quad (10)$$

$$\beta = B/B_0. \quad (11)$$

L'équation (9) définit donc le programme  $B(t)$  si  $a$  est prescrit. Puisque  $\hat{I}_Z$  et  $\hat{I}_\Theta$  doivent être proportionnels à  $\hat{B}_Z = \hat{B}_\Theta = B(t)$ , l'équation (3) détermine le programme d'amplitude des générateurs.

Du travail précité 1), nous tirons les valeurs des résistances et self-inductances des circuits :

$$R_\Theta = \frac{2\pi a}{\ell} \mathcal{R}, \quad R_Z = \frac{\ell}{2\pi a} \mathcal{R}, \quad (12)$$

$$L_\Theta = \frac{\pi\mu_0}{\ell} (b^2 - a^2), \quad L_Z = \frac{\mu_0}{2\pi} \ell \lg(b/a), \quad (13)$$

où  $\ell$  est la longueur du plasma,  $a$  son rayon et  $b$  une longueur choisie telle qu'elle tient compte de la self du circuit non associée avec le plasma. La résistance de surface  $\mathcal{R}$  est donnée par la théorie de l'effet de peau\*).

$$\mathcal{R} = \frac{|\mu_0 \omega|^{1/2}}{2\sqrt{\pi}}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{93}{\lg \Lambda} \frac{\epsilon_0 (kT)^{3/2}}{e^2 m^{1/2}}. \quad (14)$$

Pendant l'expérience, le courant dans chaque circuit augmente selon

$$\hat{I}(t) = I_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{5/3}, \quad (15)$$

et la résistance de surface décroît

$$\mathcal{R} = \frac{\mu_0 a}{2t}. \quad (16)$$

---

\*) L'effet de peau normal seulement est considéré.

Dans ces relations,  $a$  peut être une fonction du temps. L'évolution normale de l'expérience est celle qui maintient  $a$  constante et le générateur en résonnance avec le circuit.

$$\text{On a donc } \dot{L} = 0, \quad (17)$$

$$\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad LC\omega^2 = 1 \quad (18)$$

$$\text{et} \quad (\dot{I}/I)_Z = (\dot{I}/I)_\theta = \frac{2}{3t} . \quad (19)$$

#### IV. Les équations de perturbation.

Admettons que les courants soient perturbés :

$$\hat{I}_\theta \rightarrow \hat{I}_\theta + \delta \hat{I}_\theta , \quad (20)$$

$$\hat{I}_Z \rightarrow \hat{I}_Z + \delta \hat{I}_Z .$$

Ceci entraîne une modification de la pression magnétique et par (9) du rayon. Les résistances et les selfs changent selon (12) et (13). Les résistances ne sont pas seulement modifiées par effet géométrique, mais aussi parce que la température change.

La perturbation des équations des circuits s'écrit

$$\frac{\delta L}{L} \left( \frac{\dot{I}}{I} + i\alpha + \delta \right) + \frac{\delta \dot{I}}{I} + \frac{\delta I}{I} (i\alpha + \delta) + i\delta\alpha + \delta\delta = \delta V_g / i2\omega LCR_g I \quad (21)$$

où

$$\delta\alpha = \frac{1}{2LC\omega} \frac{\delta L}{L} , \quad (22)$$

$$\delta\delta = \frac{R}{2L} \left( \frac{\delta R}{R} - \frac{\delta L}{L} \right) + \left( \frac{\delta L}{L} \right) . \quad (23)$$

Pour le calcul des variations  $\delta L$  et  $\delta R$  on utilise les équations (12) et (13) en tenant compte que

$$\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-3/4} = (\beta \rho)^{-3/2} , \quad (24)$$

ce qui donne

$$\frac{\delta \mathcal{R}}{\mathcal{R}_0} = - \frac{3}{2} \left( \frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{\delta \beta}{\beta} \right) . \quad (25)$$

On obtient ainsi, en éliminant  $\delta \rho$  à l'aide de (9) :

$$\left. \frac{\delta R}{R} \right|_{\Theta} = - K_{\Theta} \frac{\delta \beta}{\beta} , \quad (26)$$

$$\left. \frac{\delta R}{R} \right|_Z = -K_Z \frac{\delta \beta}{\beta} , \quad (27)$$

$$\left. \frac{\delta L}{L} \right|_{\Theta} = \lambda_{\Theta} \frac{\delta \beta}{\beta} , \quad (28)$$

$$\left. \frac{\delta L}{L} \right|_Z = \lambda_Z \frac{\delta \beta}{\beta} , \quad (29)$$

avec

$$K_{\Theta} = \frac{6}{5}, \quad K_Z = 0 , \quad (30)$$

$$\lambda_{\Theta} = \frac{6}{5} \frac{1}{b^2/a^2 - 1} , \quad \lambda_Z = \frac{3}{5} \frac{1}{\lg(b/a)} . \quad (31)$$

Finalement, il faut encore établir la relation entre  $\delta \beta$  et les variations de courant dans les deux circuits. La pression magnétique perturbée s'écrit

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2\mu_0} \left[ \mathcal{R}_e(B_Z + \delta B_Z) \right]^2 + \frac{1}{2\mu_0} \left[ \mathcal{R}_e(B_{\Theta} + \delta B_{\Theta}) \right]^2 \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \left[ \hat{B}_Z^2 \cos^2 \omega t + 2\hat{B}_Z \delta \hat{B}_{Zr} \cos^2 \omega t - 2\hat{B}_Z \delta \hat{B}_{Zi} \cos \omega t \sin \omega t + \hat{B}_{\Theta}^2 \sin^2 \omega t \right. \\ &\quad \left. + 2\hat{B}_{\Theta} \delta \hat{B}_{Zr} \sin^2 \omega t + 2\hat{B}_{\Theta} \delta B_{\Theta i} \cos \omega t \sin \omega t \right] \end{aligned} \quad (32)$$



où l'indice  $r$  indique la partie réelle et l'indice  $i$  la partie imaginaire. La pression moyenne devient donc

$$\text{avec } \hat{B}_\theta = \hat{B}_z = B$$

$$p = \frac{1}{2\mu_0} \left[ B^2 + B \delta \hat{B}_{zr} + B \delta \hat{B}_{\theta r} \right], \quad (33)$$

d'où

$$\frac{\delta p}{p} = \frac{\delta \hat{B}_{zr} + \delta \hat{B}_{\theta r}}{B} \quad (34)$$

et

$$\frac{\delta \beta}{\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta \hat{B}_{zr}}{B} + \frac{\delta \hat{B}_{\theta r}}{B} \right). \quad (35)$$

Les champs étant proportionnels aux courants qui les produisent, la dernière équation peut s'écrire ainsi :

$$\frac{\delta \beta}{\beta} = \frac{1}{2} \Re \left( \frac{\delta \hat{I}_z}{\hat{I}_z} + \frac{\delta \hat{I}_\theta}{\hat{I}_\theta} \right). \quad (36)$$

Avec les relations établies dans la section précédente on peut maintenant écrire les équations (21) en fonction des variables

$$x = \frac{\delta \hat{I}_z}{\hat{I}_z} \quad \text{et} \quad y = \frac{\delta \hat{I}_\theta}{\hat{I}_\theta} \quad (37)$$

$$\text{et de } \beta = \frac{1}{2} \Re(x+y). \quad (38)$$

On obtient

$$\frac{d}{dt} (\lambda_z \frac{\delta \beta}{\beta} + x) + \left( \frac{\dot{I}}{I} + \mathfrak{F}_z \right) (\lambda_z \frac{\delta \beta}{\beta} + x) + \left( i \frac{\lambda \omega}{2} - \frac{K+\lambda}{2} \frac{R}{L} \right)_z \frac{\delta \beta}{\beta} = f_z, \quad (39)$$

$$\frac{d}{dt} (\lambda_\theta \frac{\delta \beta}{\beta} + y) + \left( \frac{\dot{I}}{I} + \mathfrak{F}_\theta \right) (\lambda_\theta \frac{\delta \beta}{\beta} + y) + \left( i \frac{\lambda \omega}{2} - \frac{K+\lambda}{2} \frac{R}{L} \right)_\theta \frac{\delta \beta}{\beta} = f_\theta. \quad (40)$$

où

$$\frac{\dot{I}}{I} = \frac{d\hat{I}_Z}{\hat{I}_Z dt} = \frac{d\hat{I}_\Theta}{\hat{I}_\Theta dt} \quad (41)$$

et, tenant compte de (18)

$$f_{Z,\Theta} = \frac{\omega \delta V_g}{i 2 R_g I} \Big|_{Z,\Theta} \quad (42)$$

Il est utile de séparer partie réelle et partie imaginaire de (39) et (40). Aussi allons-nous utiliser deux nouvelles variables  $\xi, \eta$  à la place de  $x_r$  et  $y_r$

$$\xi = \lambda_Z \frac{\delta \beta}{\beta} + x_r, \quad (43)$$

$$\eta = \lambda_\Theta \frac{\delta \beta}{\beta} + y_r. \quad (44)$$

On obtient ainsi le système suivant de quatre équations pour les perturbations  $\xi, \eta, x_i, y_i$

$$\dot{\xi} + \left(\frac{\dot{I}}{I} + \mathcal{R}_Z\right) \xi - \left(\frac{K+\lambda}{2} \frac{R}{L}\right)_Z \frac{1}{2+\lambda_Z+\lambda_\Theta} (\xi+\eta) = f_{Zr}, \quad (45)$$

$$\dot{\eta} + \left(\frac{\dot{I}}{I} + \mathcal{R}_\Theta\right) \eta - \left(\frac{K+\lambda}{2} \frac{R}{L}\right)_\Theta \frac{1}{2+\lambda_Z+\lambda_\Theta} (\xi+\eta) = f_{\Theta r}, \quad (46)$$

$$\dot{x}_i + \left(\frac{\dot{I}}{I} + \mathcal{R}_Z\right) x_i = - \frac{\lambda_Z \omega}{2} \frac{1}{2+\lambda_Z+\lambda_\Theta} (\xi+\eta) + f_{Zi}, \quad (47)$$

$$\dot{y}_i + \left(\frac{\dot{I}}{I} + \mathcal{R}_Z\right) y_i = - \frac{\lambda_\Theta \omega}{2} \frac{1}{2+\lambda_Z+\lambda_\Theta} (\xi+\eta) + f_{\Theta i}. \quad (48)$$

Heureusement seules les deux premières équations sont couplées. Elles s'écriront d'une façon plus compacte en utilisant les formules (16) et (19)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + \frac{b-G}{t} & \frac{g}{t} \\ \frac{G}{t} & A + \frac{B-G}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (49)$$

avec

$$a = \frac{1}{2R_g C} \Big|_z , \quad A = \frac{1}{2R_g C} \Big|_\theta , \quad (50)$$

$$\frac{b}{t} = \left( \frac{\dot{I}}{I} + \frac{R}{2L} \right)_z , \quad \frac{B}{t} = \left( \frac{\dot{I}}{I} + \frac{R}{2L} \right)_\theta , \quad (51)$$

$$\frac{g}{t} = \frac{K_z + \lambda_z}{2 + \lambda_\theta + \lambda_z} \cdot \frac{R_z}{2L_z} , \quad \frac{G}{t} = \frac{K_\theta + \lambda_\theta}{2 + \lambda_\theta + \lambda_z} \cdot \frac{R_\theta}{2L_\theta} . \quad (52)$$

Voici des conditions suffisantes pour que le système (49) soit stable (voir appendice) :

$$gG > 0 , \quad (53)$$

$$a + \frac{b-g}{t} > 0 \quad (54)$$

et

$$\left( a + \frac{b-g}{t} \right) \left( A + \frac{B-G}{t} \right) - \frac{gG}{t^2} > 0 . \quad (55)$$

La dernière condition s'écrit plus simplement

$$aA + \left[ a(B-G) + A(b-g) \right] \frac{1}{t} + \left[ (b-g)(B-G) - gG \right] \frac{1}{t^2} > 0 . \quad (56)$$

Puisque  $a > 0$ ,  $A > 0$ ,  $g > 0$ ,  $G > 0$ , toutes ces conditions sont satisfaites si

$$b > g, \quad B > G \quad (57)$$

$$\text{et} \quad \frac{G}{B} + \frac{g}{b} < 1. \quad (58)$$

En introduisant les relations (50), (51), (52), on vérifie

$$\frac{b-g}{t} = \frac{\dot{I}}{I} + \frac{R_z}{2L_z} \frac{(2 - K_z + \lambda_\theta)}{2 + \lambda_z + \lambda_\theta} > 0 \quad (59)$$

$$\text{et analogiquement} \quad B - G > 0. \quad (60)$$

De plus on trouve 
$$\frac{g}{b} + \frac{G}{B} = \frac{6/5 + \lambda_{\theta} + \lambda_z}{2 + \lambda_{\theta} + \lambda_z} < 1. \quad (61)$$

Ainsi sont satisfaites des conditions suffisantes pour la stabilité.

Il est évident que la décroissance des perturbations se fait à l'échelle des temps caractéristiques des circuits qui sont du même ordre de grandeur que  $\dot{I}/I$ ,  $R_g C$  et  $L/R$ . On peut maintenant affirmer, à posteriori, que les équations approximées (3) des circuits sont valables.

#### APPENDICE

Si toutes les solutions du système d'équations ordinaires linéaires

$$\frac{d}{dt} U_i = \alpha_{ik} U_k \quad (A1)$$

restent bornées dans le temps, on dit que le système est stable. Lorsque les coefficients  $\alpha_{ik}$  sont des fonctions du temps, il est en général très difficile de déterminer s'il y a stabilité. Mais il existe des cas stables où un simple critère suffisant est satisfait.

Si

$$\Re(\alpha_{ik} U_i \bar{U}_k) \leq 0 \quad (A2)$$

il s'en suit que

$$\frac{d}{dt} |U_i|^2 \leq 0. \quad (A3)$$

Il y a donc stabilité.

Considérons maintenant la transformation

$$V_i = t_{ik} U_k \quad (A4)$$

à coefficients  $t_{ik}$  constants. L'équation (A1) devient dans le nouveau système

$$\frac{dV_i}{dt} = \beta_{ik} V_k \quad (A5)$$

avec

$$\beta_{ik} = t_{im} t_{kl}^{-1} \alpha_{ml} . \quad (A6)$$

Mais la relation (A3) n'implique pas la relation analogue en V. On peut très bien avoir (A3) et, pour certaines valeurs de t,

$$\frac{d}{dt} |V_i|^2 > 0 . \quad (A7)$$

Il convient donc de rechercher dans un cas particulier le système de coordonnées dans lequel la condition (A2) est la moins sévère.

Considérons maintenant le système des équations (45) et (46) que nous écrivons

$$\frac{dU_i}{dt} = \beta_{ik} U_k \quad (A8)$$

avec  $u_1 = \xi$  et  $u_2 = \eta$ , et les  $\beta_{ik}$  réels. Dans ce cas le critère (A2) s'écrit

$$\beta_{11} + \beta_{22} \geq 0 ,$$

$$\beta_{11}\beta_{22} - \frac{1}{4}(\beta_{12} + \beta_{21})^2 \geq 0 . \quad (A9)$$

Il assurerait la stabilité, mais il n'est pas commode et trop sévère. Il est possible de transformer ce système avec  $t_{ik}$  réels et constants, de façon à ce qu'on obtienne

$$\alpha_{11} = \beta_{11} , \quad \alpha_{22} = \beta_{22} , \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \sqrt{\beta_{12} \beta_{21}} , \quad (A10)$$

où les  $\alpha_{ik}$  sont réels. Maintenant le critère (A2) s'écrit dans le nouveau système

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} \geq 0 ,$$

$$\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12} \alpha_{21} \geq 0 , \quad (A11)$$

et on constate qu'il s'exprime par la trace et le déterminant qui sont des invariants. On assure donc également la stabilité avec

$$\text{Trace } (\beta_{ik}) = \beta_{11} + \beta_{22} \geq 0$$

et

$$\text{Det } (\beta_{ik}) = \beta_{11} \beta_{22} - \beta_{12} \beta_{21} \geq 0. \quad (A12)$$

où les  $\beta_{ik}$  sont les coefficients du système original (45) et (46).

Il faut insister sur le fait que les inégalités (A12) ne représentent pas, en général, des conditions pour la stabilité, ni suffisantes, ni nécessaires. L'équation bien connue

$$\ddot{x} + (\cos^2 t) x = 0$$

en est un exemple. Dans le cas des équations (45) et (46), c'est la forme de  $\beta_{12}$  et  $\beta_{21}$  qui permet la transformation (A10) à coefficients constants et réels.

---

#### REFERENCES

- 1) E.S. Weibel, R. Keller : On the design of a rotating field pinched discharge, Rapport du Laboratoire de Recherches sur la Physique des Plasmas, Lausanne LRP 22/66
- 2) E.S. Weibel : Phys. Fluids 3, 946 (1960)
- 3) F. Troyon : LRP 25/66, Rapport du Laboratoire de Recherches sur la Physique des Plasmas, Lausanne. "Stability of a dense plasma confined by a rotating magnetic field".

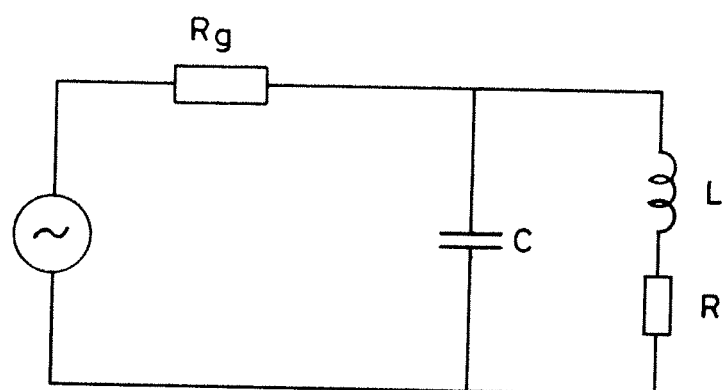


Fig. 1

Le circuit couplant le générateur au plasma.